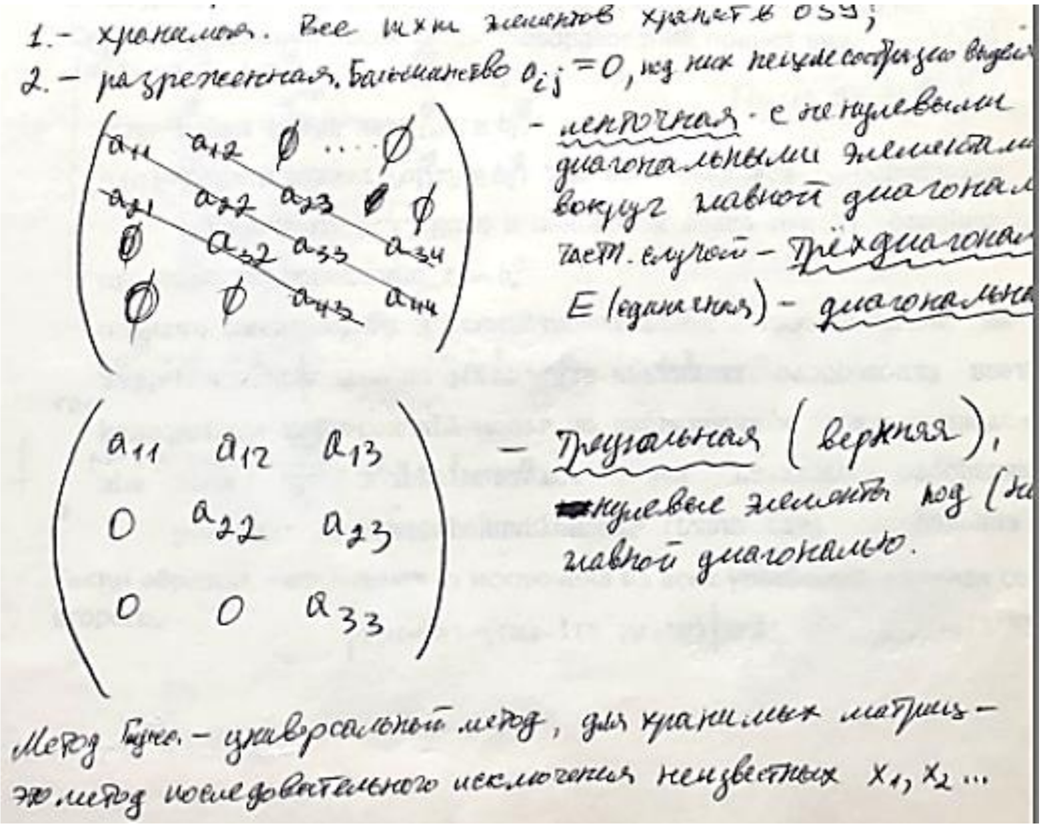
Численные методы линейной алгебры

Вид матрицы *A* СЛАУ:


1. – хранимая. Все n×n элементов хранят в ОЗУ;
2. – разреженная. Большинство $a_{ij}=0$, из них неучет соотношения выдел...

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \emptyset & \dots & \emptyset \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ \emptyset & \emptyset & a_{43} & a_{44} & \end{pmatrix}$$

– ленточная – с ненулевыми диагональными элементами вокруг главной диагонали. Частн. случай – трёхдиагональная. E (единичная) – диагональная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

– Треугольная (верхняя), нулевые элементы под (н... главной диагональю.

Метод Гаусса – универсальный метод, для хранимых матриц – это метод последовательного исключения неизвестных $x_1, x_2 \dots$

Метода Гаусса

Смотрите, например,
http://www.cleverstudents.ru/systems/solving_systems_Gauss_method.html ,
https://ru.wikipedia.org/wiki/Метод_Гаусса

Пусть нам требуется решить систему из *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными переменными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases},$$

и пусть определитель ее основной матрицы отличен от нуля.

Будем считать, что $a_{11} \neq 0$, так как мы всегда можем этого добиться перестановкой местами уравнений системы. Исключим неизвестную переменную x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Для этого ко второму уравнению системы прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$, к третьему уравнению прибавим первое, умноженное на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$, и так далее. Система уравнений после таких преобразований примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

где

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{1j} \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n$$

$$b_i^{(1)} = b_i + b_1 \cdot \left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right), \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

Таким образом, переменная x_1 исключена из всех уравнений, начиная со второго.

Далее действуем аналогично, но лишь с частью полученной системы, которая отмечена на рисунке

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots \\ \qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Будем считать, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (в противном случае мы переставим местами вторую строку с *k-ой*, где $a_{k2}^{(1)} \neq 0$).

Приступаем к исключению неизвестной переменной x_2 из всех уравнений, начиная с третьего. Для этого к третьему уравнению системы прибавим второе, умноженное на $-\frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, к четвертому уравнению прибавим второе, умноженное на $-\frac{a_{42}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$, и так далее, к *n-ому* уравнению прибавим второе, умноженное на $-\dfrac{a_{n2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Система уравнений после таких преобразований примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

где

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + a_{2j}^{(1)} \cdot \left(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right), \quad i = 3, 4, \ldots, n, \quad j = 3, 4, \ldots, n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + b_2^{(1)} \cdot \left(-\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right), \quad i = 3, 4, \ldots, n$$

.

Таким образом, переменная x_2 исключена из всех уравнений, начиная с третьего. Далее приступаем к исключению неизвестной x_3, при этом действуем аналогично с отмеченной на рисунке частью системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases}$$

Так продолжаем прямой ход метода Гаусса пока система не примет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

С этого момента начинаем обратный ход метода Гаусса: вычисляем x_n из последнего уравнения как $x_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$, с помощью полученного значения x_n находим x_{n-1} из предпоследнего уравнения, и так далее, находим x_1 из первого уравнения.

Количество вычислений $a_{ij}^{(k)}$ для всех $i, j\ k$ – это $O(m^3)$

Выбор главного элемента

(борьба с катастрофич. потерей верных знаков и переполнением)

– по строке: находясь на шаге k ищем $\max_{j\geq k}\left|a_{kj}^{(k-1)}\right|$, т.е. max элемент в строке (k) ~~(элементы < k – нулевые)~~, затем делаем соотв. перенумерацию переменных X, т.е. меняем столбцы местами

$$\begin{array}{c} \\ \\ i=k-1 \\ i=k \\ \vdots \\ i=m \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & j=k-1 & j=k & \ldots & j=m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & X & X & \ldots & X \\ 0 & 1 & X & \ldots & X \\ 0 & 0 & a_{kk}^{(k-1)} & x_k \ldots & X \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & X & \ldots & X \end{pmatrix} \end{array}$$

– особенно важно для пл...

← выбираем $\max_j |a_{kj}|$

Если перенумеруем два соседних переменных ⇒

система: $\ldots \vec{x}_{k+1} + \ldots \vec{x}_k + \ldots + \vec{x}_{k+2} + \ldots$ ⇒ нужен дополнит. 1-мерн. массив для запоминания переставленных компонент $\vec{x}$.

– по столбцу (самый простой): меняем местами нижестоящие строки по условию $\max_{i\geq k}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$, $i=k,\ldots,m$

– по всей матрице – наилучшая устойч. к погрешностям.

– особенно важно для плохо обусловленных матриц:

$\mathrm{cond}(A) \equiv \mu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
число обусловленности

$\mu \geq 1$. Чем выше μ, тем хуже обусловленность, т.е. $\|A\| \approx 0$ и $\|A^{-1}\| \approx \infty$.

Нормы могут определяться по разному, например:

$\|A\| = \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|$